Het formalisme van Poincaré of hoe 100 jaar oude wiskunde 3D GIS dichterbij brengt

Binnen het RGI-project 3D Topografie [2] wordt door de TU Delft onderzoek gedaan naar een geschikte datastructuur voor het opslaan, bewerken en analyseren van 3D geo-informatie. Cruciaal hierbij zijn de mogelijkheden die de structuur biedt voor het consistent houden van de data (aangezien de stap van 2D naar 3D zowel dataomvang als complexiteit aanzienlijk vergroot) en het ondersteunen van 3D analyses en bewerkingen (om zo 3D GIS meer te laten zijn dan alleen een realistische visualisatietechniek). Gekozen is voor een Tetrahedronized Irregular Network (TEN), een topologische structuur die de ruimte volledig opdeelt in tetraëders door gebruik te maken van simplices; de eenvoudigste vorm per dimensie: node, edge, driehoek, tetraëder. Een TEN voldoet aan de eisen qua consistentiecontrole en rekenkundige ondersteuning. Nadeel van een TEN is vaak de dataomvang en voor de doorsneegebruiker ook de complexiteit. Deze nadelen worden ondervangen in onze aanpak, die Poincaré's formalisme van de simpliciale homologie uit 1895 als uitgangspunt neemt.

Eerder onderzoek: uitgangspunten

Eerder in het onderzoek zijn twee belangrijke uitgangspunten ten aanzien van het modelleren van 3D topografie geformuleerd [3]:

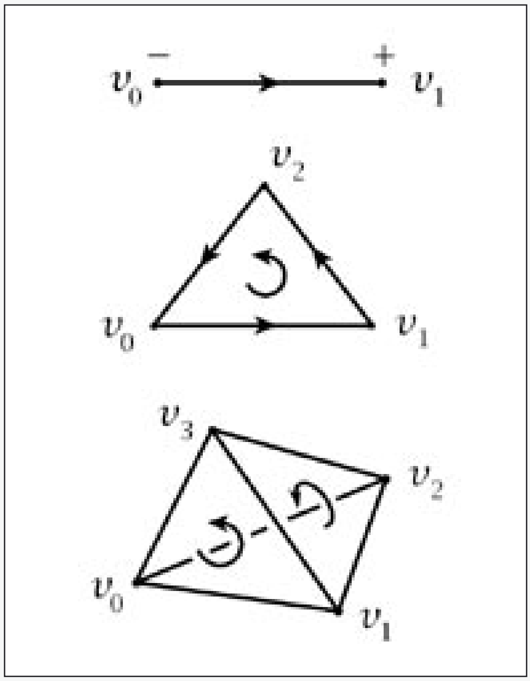
- Fysieke objecten hebben per definitie een inhoud (volume). In de werkelijkheid bestaan geen echte punt-, lijn- of vlakobjecten; er bestaan slechts punt-, lijn-, of vlakrepresentaties op een gegeven generalisatieniveau. De keuze wanneer welke weergave te gebruiken hoort thuis in het Digitaal Cartografisch Model (DCM) en daarmee niet in het Digitaal Landschap Model (DLM) dat de 3D-topografie bevat.
- De fysieke werkelijkheid kan beschouwd

worden als een volumepartitie: een verzameling van niet-overlappende volumeobjecten die tezamen de te modelleren ruimte geheel vullen. Als gevolg hiervan zijn objecten als ‘aarde‘ en ‘lucht’ expliciet onderdeel van de fysieke werkelijkheid en dus van het model. Hoewel het model bestaat uit volumeobjecten, kunnen vlakobjecten in sommige gevallen belangrijke overgangen markeren tussen volumeobjecten. Dergelijke vlakobjecten kunnen hun eigen attributen hebben (bijvoorbeeld oppervlaktemateriaal en kleur), maar ze kunnen niet bestaan zonder de aanwezigheid van deze volumeobjecten. Een vlakobject kan hiermee gezien worden als de eerste afgeleide van een volumeobject.

Vertaald naar de datastructuur betekent dit dat in de TEN structuur de fysieke objecten gerepresenteerd worden als verzameling tetraëders [4], waarbij de grens (driehoek) tussen twee tetraëders die verschillende objecten representeren, onderscheiden moet kunnen worden van de inwendige grenzen, die slechts verschillende tetraëders binnen hetzelfde object scheiden. Hoewel er intern met tetraëders wordt gewerkt, kan de gebruiker met complete volumeobjecten werken.

Achtergrond: Het formalisme van Poincaré

Simplices zijn de eenvoudigste vormen in elke dimensie. In de 0-dimensionale ruimte is dit een punt. Door hier een tweede node aan toe te voegen ontstaat de eenvoudigste 1D vorm: de edge. Het blijven toevoegen van nodes geeft de simplices in hogere dimensies: toevoegen van een derde node geeft de driehoek in 2D, een vierde node de tetraëder in 3D, enzovoort. In dit artikel wordt de volgende notatie gebruikt waarin n-dimensionale simplices S_n worden gedefinieerd aan de hand van de $(n+1)$ vertices v: $Sn = <v_0, v_1, \ldots, v_n>$. Elke simplex wordt begrensd door minderdimensionale simplices: een tetraëder wordt begrensd door vier driehoeken, een driehoek door drie edges en een edge weer door twee nodes. Deze relatie tussen een n-dimensionale simplex S_n en de $(n$-1)-dimensionale grens-simplices (de zgn. simpliciale homologie) is



Figuur 1   De geörienteerde 1-, 2- en 3-simplex

vastgelegd in het formalisme van Poincaré (waarin het dakje ^ het weglaten van de i-de vertex aangeeft) [5, 6]:

$$\partial S_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \langle v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n \rangle$$

Dit geeft voor de grenzen van edges, driehoeken en tetraëders de volgende resultaten:

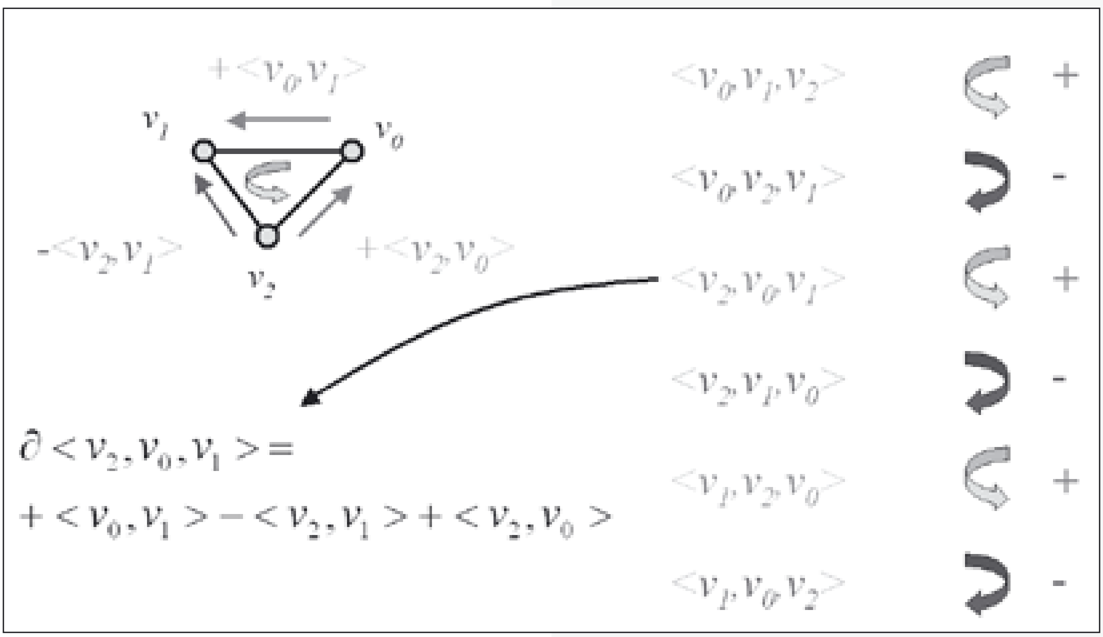
$S_1 = \langle v_0, v_1 \rangle \quad \partial S_1 = \langle v_1 \rangle - \langle v_0 \rangle$

$S_2 = \langle v_0, v_1, v_2 \rangle \quad \partial S_2 = \langle v_1, v_2 \rangle - \langle v_0, v_2 \rangle + \langle v_0, v_1 \rangle$

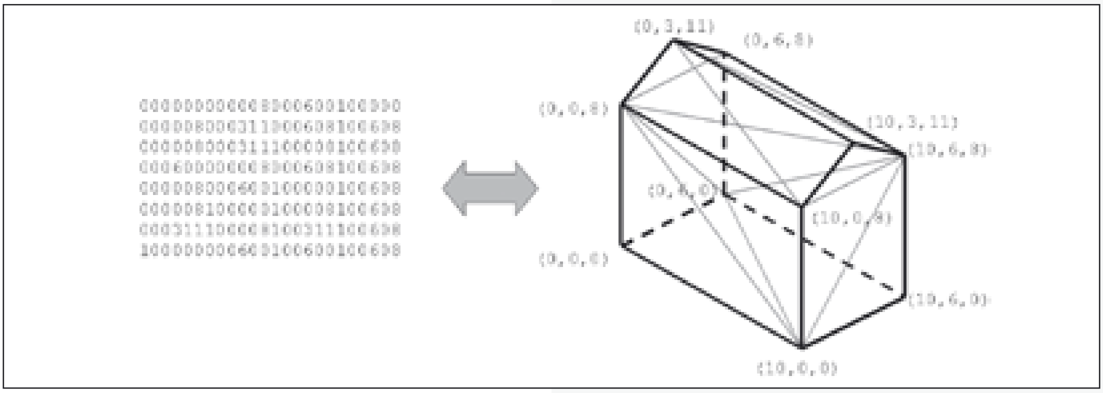
$S_3 = \langle v_0, v_1, v_2, v_3 \rangle \quad \partial S_3 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle - \langle v_0, v_2, v_3 \rangle + \langle v_0, v_1, v_3 \rangle - \langle v_0, v_1, v_2 \rangle$

Aan dit voorbeeld is te zien dat alle simplices georiënteerd zijn. Een bijzondere en voor gebruik binnen een datastructuur zeer prettige eigenschap is dat de (n-1) dimensionale grenssimplices allemaal identiek georiënteerd zijn. Zo is een driehoek met-de-klok-mee danwel tegen-de-klok-in georiënteerd en wijzen de normaalvectoren op de driehoeken die een tetraëder begrenzen of allemaal naar binnen toe of allemaal naar buiten toe (dit alles na correctie met + of – teken).

Aan de hand van de volgorde kan ook de oriëntatie van de simplex worden vastgelegd. Voor elke n--simplex kunnen $(n+1)!$ verschillende permutaties onderscheiden worden. Alle even permutaties van een georiënteerde simplex $\langle v0, \ldots, vn \rangle$ hebben een positieve oriëntatie, alle oneven permutaties een negatieve, dus bijvoorbeeld voor een edge zijn de twee opties $\langle v0, v1 \rangle = -\langle v1, v0 \rangle$. Een driehoek



Figuur 2 De zes permutatuies van een driehoek met bijbehorende oriëntatie



Figuur 3: Codering van de tetraëders in de nieuwe compacte datastructuur

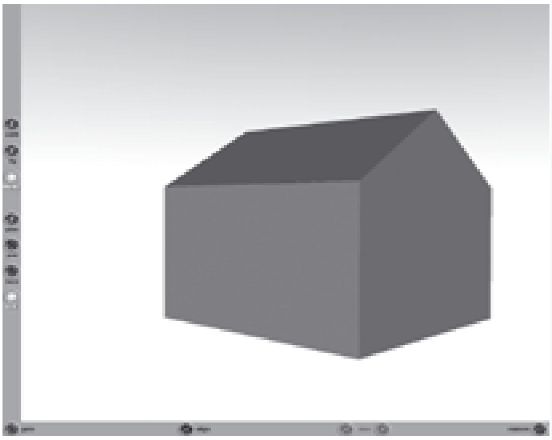
kan op zes manieren worden geschreven (oriëntatie drie keer positief, drie keer negatief) en een tetraëder op 24 manieren (als een wonder zijn er twaalf positief en twaalf negatief):

3D datastructuur: Poincaré-gebaseerd TEN

Een TEN is opgebouwd uit goed aansluitende tetraëders, driehoeken, edges en nodes, zogenaamde simplices. Het gebruik hiervan als bouwstenen voor een datastructuur in combinatie met een algebraïsche aanpak is eerder voorgesteld voor 2D GIS [1], maar niet voor 3D. Tussen al deze bouwstenen bestaan topologische relaties, die gebruikt kunnen worden voor het consistent houden van de data (geen overlappende volumes en ook geen gaten) en het beantwoorden van vragen, zoals buurrelaties. In een database-implementatie leidt dit vaak tot het aanmaken van tabellen met tetraëders, driehoeken, edges en nodes en veel onderlinge verwijzingen, waardoor deze structuur omvangrijk wordt. In onze aanpak is ervoor gekozen om alleen de tetraëders op te slaan en alle informatie over minder-dimensionale simplices af te leiden met behulp van het formalisme van Poincaré. Immers, als men weet dat een tetraëder bestaat uit nodes $\langle v_0,v_1,v_2,v_3\rangle$, dan zijn daaruit de vier driehoeken (inclusief oriëntatie) af te leiden $S_3 = \langle v_1,v_2,v_3\rangle - \langle v_0,v_2,v_3\rangle + \langle v_0,v_1,v_3\rangle - \langle v_0,v_1,v_2\rangle$, waaruit weer de afzonderlijke edges zijn af te leiden. De nodes zijn op elk niveau aanwezig. Binnen een databaseomgeving is het idee om driehoeken en edges af te leiden in plaats van op te slaan, te implementeren door gebruik te maken van views.

Implementatie: een eenvoudig voorbeeld

Tetraëders kunnen gecodeerd worden aan de hand van de vier nodes die de tetraëder opspannen. Als nu vervolgens nodes gecodeerd worden aan de hand van hun coördinaten, ontstaat een volgende TEN-representatie:



Figuur 4: VRML-ouput van het model: hetzelfde huisje uit figuur 3

Elke regel in de codering links representeert een tetraëder in het huisje rechts. De codering is in de vorm $x_1y_1z_1x_2y_2z_2x_3y_3z_3x_4y_4z_4$. Hiermee dient bijvoorbeeld de laatste regel (100000000 600100600100608) geïnterpreteerd te worden (voor elk coördinaatelement zijn twee posities gebruikt) als de tetraëder die opgespannen wordt door de punten (10,00,00), (00,06,00), (10,06,00) en (10,06,08), oftewel de tetraëder rechtsonder in het huisje.
Verder is er voor gezorgd wordt dat alle tetraëders identiek georiënteerd zijn (normaalvectoren altijd uitwendig gericht). Als van de verzameling tetraëders die een fysiek object (zoals een huis) representeert, telkens alle grenzen (driehoeken) worden afgeleid en opgeteld, dan blijven precies de driehoeken op de objectgrens over. Dit komt doordat alle inwendige driehoeken éénmaal met positieve en éénmaal met negatieve oriëntatie voor zullen komen, zodat de volumeobjecten (polyhedrons) gemakkelijk zijn te extraheren.
Een complete 3D topografische dataset kan in deze vorm worden opgeslagen als de codering van de tetraëders nog wordt uitgebreid met een ID van het gerepresenteerde object, bijvoorbeeld in de vorm $x_1y_1z_1x_2y_2z_2x_3y_3z_3x_4y_4zID$. Het afleiden van alle fysieke objecten uit het TEN wordt hiermee een kwestie van optellen en aftrekken. Door basale edit (mutatie) operaties te ontwikkelen die de structuur van de ene naar de andere consistente toestand brengen, blijft de structuur dus gegarandeerd correct. Bijzonder punt van aandacht hierbij is de voorwaarde dat de zijvlakken van de volumeobjecten als verzamelingen driehoeken in het TEN moet zitten.

Conclusie

Door de datastructuur te baseren op de relaties zoals onderzocht binnen de simpliciale homologie en specifiek door toepassing van de boundary operator van Poincaré, ontstaat een zeer compacte, topologische datastructuur. De structuur heeft een solide theoretische onderbouwing door uit te gaan van deze wiskundige theorieën en biedt veel mogelijkheden voor het consistent houden van de data en het uitvoeren van analyses en bewerkingen. De gebruiker kan profiteren van topologische relaties, zonder dat deze expliciet bijgehouden hoeven te worden. Op deze wijze vindt meer dan 100 jaar oude wiskunde een nieuwe toepassing en brengt het 3D GIS dichterbij door de compacte en degelijke structurering van objecten. Naast de theorie is er inmiddels ook een eerste kleine proef-dataset in deze structuur opgeslagen (Oracle spatial) en de komende periode zal worden gewerkt uit meer functionaliteit gebaseerd op deze structuur (en tevens getoetst met grotere datasets).

Literatuur

[1] Egenhofer, M. (1989), A Formal Definition of Binary Topological Relationships. In: Proceedings Third International Conference on Foundations of Data Organisation and Algorithms (FODO), Lecture Notes in Computer Science, Vol. 367, pp.457-472.

[2] http://www.gdmc.nl/3dtopo

[3] Penninga, F. (2005), 3D Topographic Data Modelling: Why Rigidity Is Preferable to Pragmatism. In: Spatial Information Theory, Cosit'05, Vol. 3693 of Lecture Notes on Computer Science, Springer, pp. 409–425.

[4] Penninga, F., van Oosterom, P. & Kazar, B. M. (2006), A TEN-based DBMS approach for 3D Topographic Data Modelling. In: Progress in Spatial Data Handling, 12th International Symposium on Spatial Data Handling, Springer, pp.581-598

[5] Poincaré, H. (1895), Analysis Situs, Journal de l'Ecole Polytechnique ser 2, Vol.1, pp. 1-123.

[6] Poincaré, H. (1899), Complément a l'Analysis Situs, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t.13, pp.285-343