

Wiskunde van GIS – Het Poincaré formalisme van de simpliciale homologie voor 3D volume modellen

P.J.M. van Oosterom

F. Penninga

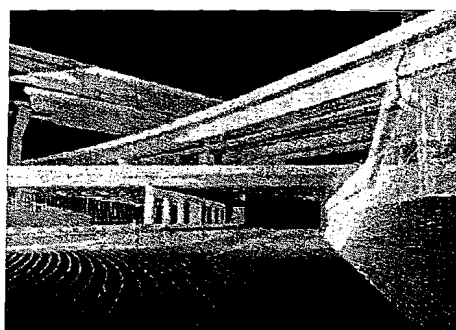
Technische Universiteit Delft

e-mail: p.v.oosterom@otb.tudelft.nl

In dit artikel zal nader worden ingegaan op het opslaan (modelleren) van 3D topografie gebaseerd op een wiskundige theorie. Topografische objecten zoals gebouwen, infrastructuur en kunstwerken worden steeds complexer door toenevend meervoudig ruimtegebruik. Vergrote bewustwording van het belang van duurzame (stedelijke) ontwikkelingen verhoogt de behoefte aan 3D planning- en analysemogelijkheden. Als gevolg hiervan moeten topografische producten worden uitgebreid naar de derde dimensie. In dit artikel wordt een nieuw 3D topologisch datamodel gepresenteerd, gebaseerd op het Poincaré formalisme van de simpliciale homologie. De interne structuur bestaat uit een netwerk van simplexen (knopen, zijden, driehoeken en tetraheders), die goed gedefinieerd zijn, en zeer geschikt zijn voor het consistent bijhouden van de 3D data. Complete 3D objecten bestaan uit een verzameling van deze simplexen.

1. INTRODUCTIE

De meeste topografische producten representeren de werkelijkheid via een afbeelding in twee dimensies. Echter de topografische objecten (fysieke objecten, zoals gebouwen, wegen, tunnels, viaducten, etc.) worden steeds complexer door het toenemende meervoudige ruimtegebruik. Dit vraagt om 3D data modellen ter ondersteuning van 3D planning en analyse, dit in tegenstelling tot de eerdere 3D GIS ontwikkelingen die vooral op de visualisatie gericht waren. Een kenmerk van topografische producten is hun brede variëteit aan toepassingen, met als gevolg dat het niet mogelijk is om de productdefinitie voor één specifieke toepassing te optimaliseren. Dankzij de continue ontwikkelingen op het gebied van de sensor technologie (Vosselman 2005) komen er meer en meer 3D gegevens beschikbaar. Bovendien neemt de nauwkeurigheid, punt dichtheid en daarmee ook de gegevenshoeveelheden toe. Een voorbeeld van terreestisch laserscannen is in Figuur 1 te zien.



Figuur 1. Terrestisch laser scannen geeft inzicht in complexe constructies.

Er is een groot aantal onderzoeken verricht naar 3D data modellering. Veel van deze onderzoeken zijn samengevat en vergeleken in (Zlatanova 2002). Het uitbreiden van topografische datamodellen naar de derde dimensie is vooral relevant voor grootschalige topografie. Het waarborgen van de integriteit en het zorgen voor goede performance zijn belangrijke eisen. Vandaar dit onderzoek om de 3D datastructuur te implementeren in een ruimtelijke database gebaseerd op een 'Tetraheder Netwerk' (TEN). Een TEN heeft namelijk een aantal goede eigenschappen, zoals: eenduidige definitie van driehoeken (per definitie vlak), aanwezigheid van topologische relaties, goede onderhoudbaarheid, visualisatie via driehoeken, en flexibiliteit om meer complexe objecten te vormen. Het model is gebaseerd het Poincaré formalisme van de simpliciale homologie (Poincaré 1895) en heeft daarmee een solide fundamenteel.

2. 3D TOPOGRAFISCH MODEL IN EEN TEN DATASTRUCTUUR

Als we topografie zien als de verzameling van fysieke objecten, kunnen er twee opmerkingen worden gemaakt voor wat betreft 3D topografisch modelleren:

1. De fysieke objecten hebben per definitie een inhoud (volume). Er bestaan in de werkelijkheid geen echte punt-, lijn- of vlakobjecten; er bestaan slechts punt-, lijn-, of vlakrepresentaties op een gegeven generalisatieniveau. Welke weergave gebruikt zou moeten worden, is aangegeven in het Digitaal Cartografisch Model (DCM), maar niet in het Digitaal Landschaps Model (DLM), welke de 3D topografie bevat.
2. De fysieke werkelijkheid kan beschouwd worden als een volume partitie: een verzameling van niet-overlappende volume objecten, die tezamen de te modelleren ruimte geheel vullen. Als gevolg hiervan zijn objecten als 'aarde' en 'lucht' expliciet onderdeel van de fysieke werkelijkheid en dus van het model.

De topografische gegevenverzameling bestaat dus uit volumeobjecten. Toch kunnen in sommige gevallen ook vlakobjecten nuttig zijn, aangezien deze belangrijke overgangen markeren tussen twee volumeobjecten. Vlakobjecten kunnen hun eigen attributen hebben, zoals oppervlaktemateriaal en kleur, maar

ze kunnen niet bestaan zonder de aanwezigheid van deze volumeobjecten. Een vlakobject kan worden gezien als de eerste afgeleide van een volumeobject (en dit zou herhaald kunnen worden voor lijn- en puntobjecten). In het UML klassediagram (zie Figuur 3) zijn de vlakobjecten dan ook als associatieklassen gemodelleerd.

De keuze om expliciet ‘lucht’ en ‘aarde’ objecten mee te nemen – eigenlijk de ‘lege’ ruimte tussen de fysieke objecten – is mede ingegeven door het feit dat deze ‘lege’ ruimte vaak het onderwerp van analyse is. In geval van modelleren van luchtverontreiniging, dijkdoorbraak of overstroming, is de gebruiker geïnteresseerd wat er met deze ‘lege’ ruimte gebeurt.

2.1. Poincaré formalisme van de simpliciale homologie

De TEN is de 3D tegenhanger van het welbekende TIN (getrianguleerd onregelmatig netwerk). Behalve knopen, zijden en driehoeken, bestaat een TEN uit tetraheders voor het representeren van volumeobjecten. Knopen, zijden, driehoeken en tetraheders zijn allen simplexen; d.w.z. de meest eenvoudige primitieven in de gegeven dimensie. Het modelleren van 3D objecten d.m.v. simplexen is beschreven door Carlson (1987). Het gebruik van simplexen heeft een aantal voordelen:

1. Simplexen zijn goed gedefinieerd: een kD simplex wordt begrensd door $k+1$ simplexen van de dimensie $k-1$ (Egenhofer et al. 1989). Bijvoorbeeld: een 2D simplex (driehoek) wordt begrensd door 3 1D simplexen (zijden).
2. Vlakheid van elke driehoek, aangezien 3 punten liggen per definitie in een vlak.
3. Elke simplex is convex, ongeacht de dimensie.

Een direct gevolg van het goed gedefinieerde karakter van simplexen en daarmee een TEN, is de beschikbaarheid van 3D topologische relaties. Daar waar in 2D (TIN) veel belangrijke topologische relaties gerelateerd zijn aan de zijde (b.v. een zijde heeft een driehoek links en een driehoek rechts), zijn in 3D veel van de belangrijke relaties te vinden op het niveau van de driehoek. Elke driehoek is onderdeel van de begrenzing van twee tetraheders. Links en rechts zijn betekenisloos in 3D, maar via de ordening van de zijden binnen een driehoek kan de richting van de normaalvector van de driehoek bepaald worden. Hiermee kan dus een tetraheder in positieve en negatieve richting worden aangegeven. De n -dimensionele simplex wordt gedefinieerd door $n+1$ knopen en dit wordt als volgt genoteerd $S_n = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$.

De eerste vier simplexen zijn dus respectievelijk van 0D naar 3D: $S_0 = \langle x_0 \rangle$, $S_1 = \langle x_0, x_1 \rangle$, $S_2 = \langle x_0, x_1, x_2 \rangle$, and $S_3 = \langle x_0, x_1, x_2, x_3 \rangle$. De $(n+1)$ knopen geven $(n+1)!$ permutaties van deze knopen, of te wel resp. 1, 2, 6 en 24 opties voor 0D, 1D, 2D en 3D simplexen. Voor S_1 zijn de twee permutaties $\langle x_0, x_1 \rangle$ and $\langle x_1, x_0 \rangle$, waarvan de eerste (van begin naar einde) positief (+) wordt genoemd en de tweede negatief (-). De 2D simplex heeft zes permutaties $S_2 : \langle x_0, x_1, x_2 \rangle$, $\langle x_1, x_2, x_0 \rangle$, $\langle x_2, x_0, x_1 \rangle$, $\langle x_2, x_1, x_0 \rangle$, $\langle x_0, x_2, x_1 \rangle$ en $\langle x_1, x_0, x_2 \rangle$. De eerste drie hebben de tegenovergestelde oriëntatie aan de tweede set van drie, dus er kan gesteld worden dat

$\langle x_0, x_1, x_2 \rangle = - \langle x_2, x_1, x_0 \rangle$. De positieve oriëntatie is tegen de klok indraaiend (+) en de negatieve oriëntatie is met de klok meedraaiend (-). Voor de 3D simplex $S_3 = \langle x_0, x_1, x_2, x_3 \rangle$ zijn er 24 verschillende permutaties, waarvan er 12 gerelateerd zijn aan de positief georiënteerde tetraheder (+, alle normaalvectoren wijzen naar buiten) en de overige 12 betreffen de negatief georiënteerde tetraheder (-, alle normaalvectoren wijzen naar binnen). Aangezien er dus verschillende equivalente notaties zijn, is het handig om een afspraak te maken over de voorkeursnotatie; b.v. de combinatie met positieve oriëntatie met knopen met de laagste id's als eerste. Volgens het Poincaré formalisme van de simpliciale homologie, bestaat de grens van een simplex uit de volgende som van $(n-1)$ dimensionale simplexen (weglaten van de i^{de} knoop en het om en om afwisselen van de + en - tekens):

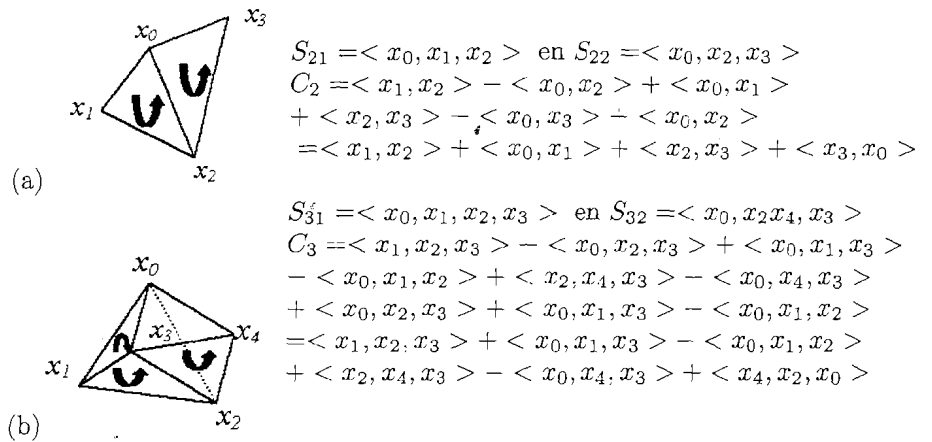
$$\partial S_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \langle x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n \rangle$$

Dus de grens van $\partial S_1 = \langle x_0, x_1 \rangle$ is $\langle x_1 \rangle - \langle x_0 \rangle$ en de grens van $\partial S_1^{neg} = \langle x_1, x_0 \rangle$ zou zijn $\langle x_0 \rangle - \langle x_1 \rangle$. De grens van $\partial S_2 = \langle x_0, x_1, x_2 \rangle$ is $\langle x_1, x_2 \rangle - \langle x_0, x_2 \rangle + \langle x_0, x_1 \rangle$. Op soortgelijke manier kunnen de grenzen van de andere 5 permutaties van S_2 gegeven worden. Tenslotte de grens $\partial S_3 = \langle x_0, x_1, x_2, x_3 \rangle$ is $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle - \langle x_0, x_2, x_3 \rangle + \langle x_0, x_1, x_3 \rangle - \langle x_0, x_1, x_2 \rangle$ (en soortgelijk voor de 23 andere permutaties). Kijkend naar de grenzen van de grenzen van een tetraheder, dat wil zeggen de grenzen van de driehoeken (de zijden dus), blijkt dat elke zijde exact één keer in de positieve richting en één keer in de negatieve richting voorkomt binnen de tetraheder. Een ander interessant resultaat van het Poincaré formalisme van de simpliciale homologie is het aantal lager dimensionale simplexen die voorkomen als (in)directe grens van een gegeven simplex:

$$S_n \text{ heeft } \binom{n+1}{p+1} \text{ grens simplexen van dimensie } p \text{ met } (0 \leq p < n)$$

Dus S_2 (driehoek) bestaat uit 3 0D simplexen (knopen) en 3 1D simplexen (zijden). De simplex S_3 heeft respectievelijk 4, 6 en 4 0D, 1D and 2D grens-simplexten. Wanneer buursimplexten van gelijke dimensie worden samengevoegd, dan wordt hun gemeenschappelijke grens verwijderd zoals aangegeven in Figuur 2a. Neem bijvoorbeeld de buurdriehoeken $\langle x_0, x_1, x_2 \rangle$ en $\langle x_0, x_2, x_3 \rangle$ dan resulteert het samenvoegen van al hun grenzen (zijden) in: $(\langle x_1, x_2 \rangle - \langle x_0, x_2 \rangle + \langle x_0, x_1 \rangle) + (\langle x_2, x_3 \rangle - \langle x_0, x_3 \rangle + \langle x_0, x_2 \rangle) = \langle x_1, x_2 \rangle + \langle x_0, x_1 \rangle + \langle x_2, x_3 \rangle - \langle x_0, x_3 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle + \langle x_0, x_1 \rangle + \langle x_2, x_3 \rangle + \langle x_3, x_0 \rangle$. Merk dus op dat de gemeenschappelijke grens $\langle x_0, x_2 \rangle$ is verdwenen. Op een zelfde wijze resulteert het samenvoegen van twee buurttetraheders $\langle x_0, x_1, x_2, x_3 \rangle$ en $\langle x_0, x_2, x_4, x_3 \rangle$ en het optellen van hun grenzen (driehoeken) in $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle + \langle x_0, x_1, x_3 \rangle + \langle x_2, x_1, x_0 \rangle + \langle x_2, x_4, x_3 \rangle + \langle x_3, x_4, x_0 \rangle + \langle x_4, x_2, x_0 \rangle$. Wanneer ook hier weer naar de zijden wordt gekeken, dan valt het op dat elke zijde één keer in positieve en één keer in negatieve richting

wordt gebruikt. De samengevoegde buur n -simplexen worden een 'simpliciaal complex' of n -cell genoemd. Het is goed mogelijk om een topologische structuur te bouwen voor een verzameling verbonden n -simplexen (inclusief al hun lager dimensionale grenzen: $0, \dots, n-1$ simplexen), welke het n -dimensionale domein geheel opdeelt. In 3D wordt dit het tetrahedron netwerk (TEN) genoemd. Binnen zo'n netwerk is het niet alleen interessant om naar de grens van een simplex te kijken, maar ook naar de co-grens, oftewel van welke hoger dimensionale simplexen de gegeven simplex zelf een grens is. Zo bestaat bijvoorbeeld de grens van een driehoek uit drie zijden en de co-grens van de driehoek uit twee tetraheders. Op soortgelijke manier bestaat de grens van een zijde uit twee knopen en de co-grens uit twee of meer driehoeken.

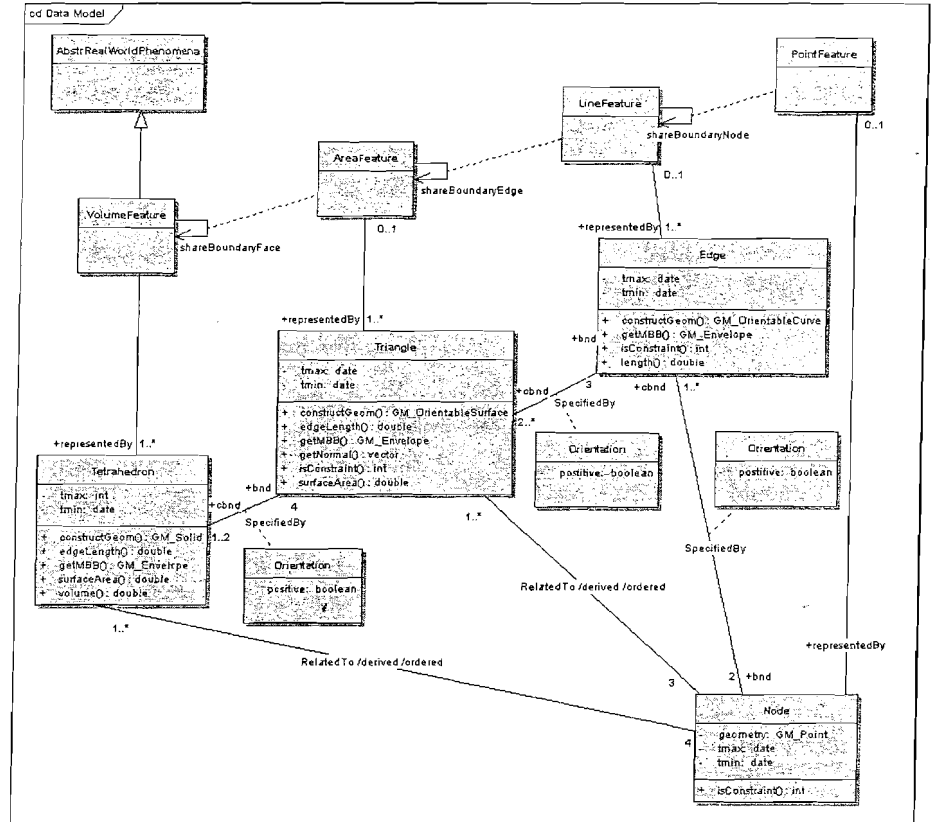


Figuur 2. Samengevoegde simplex buren vormen een complex in (a) 2D en (b) 3D.

2.2. 3D Topografie model gebaseerd op een TEN

Redelijk dicht bij dit model komen de implementaties in Panda (Egenhofer et al. 1989) en Oracle Spatial, beide echter gaan maar tot twee dimensies en zijn gebaseerd op complexen (samengevoegde buur simplexen van zelfde dimensie, of te wel de n -cellen) en niet op de simplexen zelf.

Er zijn drie verschillende conceptuele TEN modellen ontwikkeld. Hoewel deze alle drie ongeveer een gelijke bedoeling hebben zijn de verschillen toch opvallend. Daar een conceptueel model de start van een implementatie vormt zijn deze verschillen wel belangrijk. Het eerste model is een min of meer intuïtieve modellering van een TEN; zie Figuur 3: de primitieven zijn gericht (positief) en de grens/co-grens associaties tussen knoop en zijde, zijde en driehoek en driehoek en tetraheder zijn van een teken voor voorzien via de associatie klasse 'Orientation'. Een efficiënte implementatie zal waarschijnlijk geen expliciete extra klassen gebruiken, maar de verwijzingen van teken (+/-) voorzien. De associatie tussen tetraheder (of driehoek) en knoop kan worden afgeleid (en geeft de juiste ordening van de knopen).



Figuur 3. Het eerste TEN model (d.w.z. model 1)

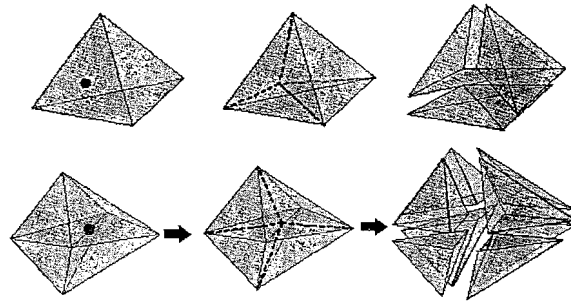
Het tweede model (appendix A) is een variant op het eerste model, maar in plaats van associatie klassen, zijn er nu extra klassen geïntroduceerd: de ongerichte versie van hun gerichte tegenhangers. Net als bij het eerste model kunnen nu ook weer de associaties tussen tetraheder (of driehoek) en knoop worden afgeleid. Het derde model is direct gebaseerd op het Poincaré formalisme van de simpliciale homologie: directe associaties tussen knoop en alle drie de andere primitieven (zijde, driehoek en tetraheder). De ordening van de knopen is hierbij belangrijk, want deze definieert tevens de oriëntatie. De andere associaties (tussen tetraheder en driehoek en tussen driehoek en zijde) kunnen worden afgeleid inclusief de richting/oriëntatie. De belangrijkste verschillen tussen de 3 modellen zijn: (1) welke associaties worden expliciet opgeslagen en welke worden afgeleid en (2) in geval van georiënteerde associaties (verwijzingen), worden deze gemodelleerd via een associatie klasse of via extra ongerichte primitieven? Het derde model bevat de minste redundantie voor wat betreft de verwijzingen en is bovendien op zuivere theorie van het Poincaré formalisme van de simpliciale homologie gebaseerd.

3. GEBRUIK VAN HET TEN MODEL

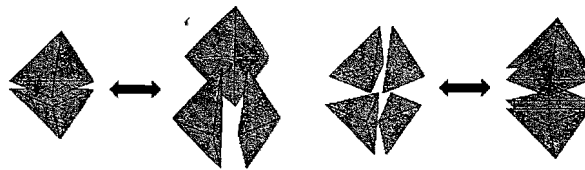
De gegevens worden in een database beheerd. Een eerste stap in het omzetten van de objecten uit de echte wereld naar een 3D TEN representatie. De feitelijke objectbegrenzings (van b.v. de gebouwen) komen dan terug als zogenaamde verzameling van vastgeprikt driehoeken ('constraints') in het TEN, deze mogen namelijk niet zonder meer worden aangepast. Daarnaast zijn er ook driehoeken die de interne structuur beschrijven, deze kunnen worden aangepast zonder dat de buitenkant van een object in het geding komt. Bij het vormen van het tetraheder netwerk is het goed om slecht gevormde primitieven te voorkomen. Op dit gebied heeft (Shewchuk 1997) al veel onderzoek verricht. Belangrijk in een praktische setting is dat de gegevens incrementeel bijgehouden moeten kunnen worden door het toevoegen (of verwijderen) van objecten, vaak ten koste van 'lucht' of 'aarde' tetraheders. In sommige gevallen kan het ook ten koste gaan van andere objecten en zal de gebruiker goed moeten nagaan of dit inderdaad wel de bedoeling is. De meeste objecten zullen (indirect) verbonden zijn met het 'aardoppervlak' en dit moet ook tijdens het muteren goed in de gaten worden gehouden cq. worden afgedrongen door het systeem.

Het toevoegen of verwijderen van objecten wordt intern vertaald naar de volgende basis mutatieoperaties die de TEN structuur aanpassen:

1. Verplaats knoop (alleen toegestaan indien de topologische structuur correct blijft).
2. Toevoegen van een knoop en bijbehorende zijden/ driehoeken/ tetraheders (of de omgekeerde operatie 'verwijder knoop'), waarbij de volgende drie gevallen mogelijk zijn, afhankelijk van waar de knoop wordt toegevoegd:
 - Midden in een tetraheder (1 tetraheder betrokken) en toegevoegd worden +1 knoop, +4 zijden, +6 driehoeken en +3 tetraheders (respectievelijk de 0/1/2/3-simplex).
 - Midden in een driehoek (2 tetraheders betrokken) en toegevoegd worden +1 knoop, +5 zijden, +7 driehoeken en +4 tetraheders (Figuur 4 boven).
 - Midden in een zijde (n tetraheders betrokken) en toegevoegd worden +1 knoop, $+(n + 1)$ zijden, $+2n$ driehoeken en $+n$ tetraheders (Figuur 4 onder).
3. Toevoegen (of verwijderen) van constraints: in de eerste plaats driehoeken (als onderdeel van de buitenkant van een object), maar daarnaast mogelijk ook zijden en knopen (i.v.m. met lager dimensionale objecten).
4. Omklappen van tetraheders, waarbij twee situaties mogelijk zijn, afhankelijk van de configuratie (zie Figuur 5):
 - 2-3 bistellar omklappen
 - 4-4 bistellar omklappen



Figuur 4. Toevoegen van een knoop; boven: in een driehoek (buur tetraheder niet getoond), onder: in een zijde verbonden met vier tetraheders, beide illustraties uit (van der Most 2004).



Figuur 5. Omkappen in 3D: 2-3 bistellar omkappen (links) en 4-4 bistellar omkappen (rechts), wederom beide illustratie uit (van der Most 2004).

4. CONCLUSIE

Het uitreiden van het topografische gegevensmodel is vooral relevant in het geval van grootschalige topografie. Gezien de omvang en het belang van deze gegevens zijn het garanderen van de integriteit en het bieden van een goede performance van groot belang. Daarom moeten deze gegevens dan ook in een DBMS beheerd worden in een gegevensmodel gebaseerd op het Poincaré formalisme van de simpliciale homologie. De TEN structuur is geschikt vanwege de eigenschappen als goed gedefinieerde driehoeken (per definitie vlak), topologische structuur, goede onderhoudbaarheid, visualisatie gebaseerd op driehoeken, en de mogelijkheid om meer complexe objecten te vormen (door het samenvoegen van tetraheders). Het gepresenteerde conceptuele model is de basis voor een toekomstige implementatie in Oracle en er zullen een aantal verschillende prototypen op gebaseerd worden. Bovendien zal naast de 3^{de} dimensie ook het temporele aspect in dit model worden meegenomen.

DANKWOORD

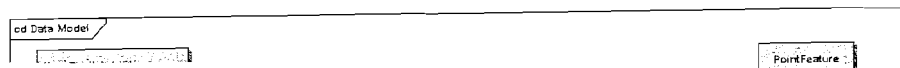
Dank aan Baris Kazar, John Herring, Siva Ravada, Ravi Kothuri en Han

Wammes voor de constructieve discussie over TEN modelleren, welke de basis voor dit artikel heeft gelegd. Het onderzoek wordt uitgevoerd in het kader van het Bsik RGI (Ruimte voor Geo-Informatie) project '3D topografie' (<http://www.gdmc.nl/3dtopo>).

LITERATUUR

1. Carlson, E. (1987). Three-dimensional conceptual modeling of subsurface structures. In: *Auto-Carto 8*, pp. 336–345.
2. Egenhofer, M. and Andrew, F. (1989). PANDA: An Extensible DBMS Supporting Object-Oriented Software Techniques Database Systems in Office, Engineering, and Science, Zurich, Switzerland, T. Harder (ed.), *Informatik Fachberichte*, Vol. **204**, Springer-Verlag, pp. 74–79.
3. Van der Most, A. (2004). An algorithm for overlaying 3D features using a tetrahedral network Master's Thesis TU Delft, 2004, 96 p.
4. Poincaré, H. (1895), Analysis Situs, *Journal de l'Ecole Polytechnique* ser 2, Vol. **1**, pp. 1-123.
5. Shewchuk, J.R. (1997). Delaunay refinement mesh generation, PhD thesis, Carnegie Mellon University.
6. Vosselman, G. (2005). Sensing Geo-information, Inaugural address, ITC Enschede.
7. Zlatanova, S., Rahman, A. A., Shi, W. (2002) Topology for 3D spatial objects, International Symposium and Exhibition on Geoinformation 2002, 22–24 October, Kuala Lumpur, Malaysia, 7 p.

APPENDIX A. ALTERNATIEVE MODELLEN



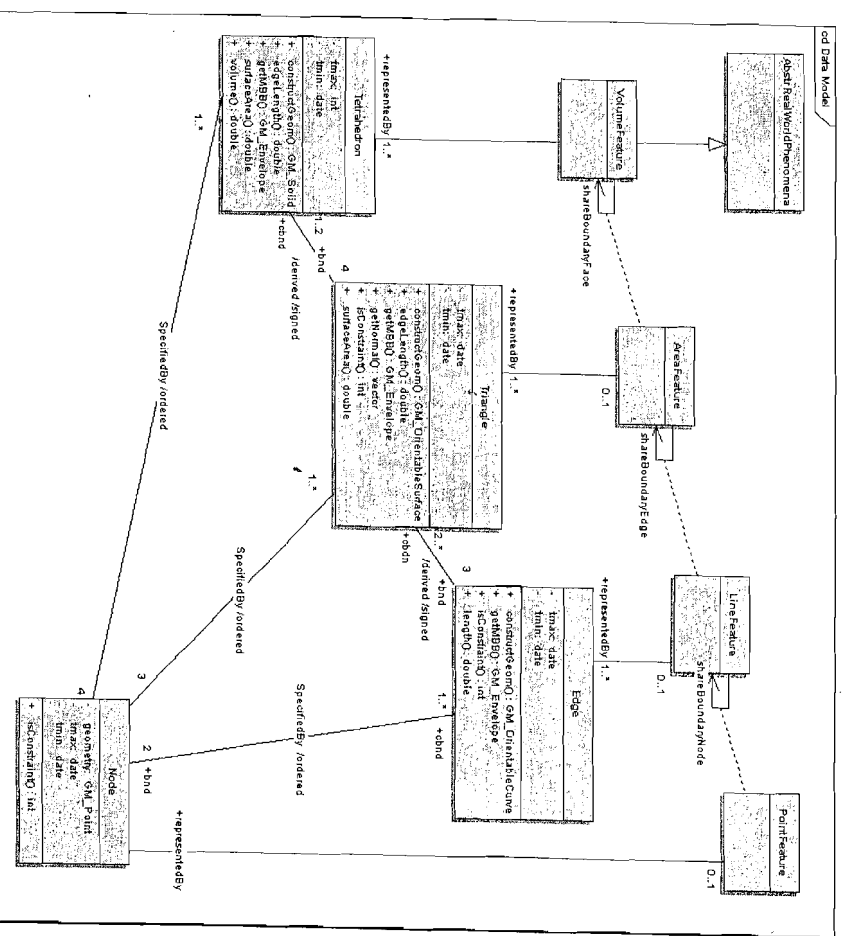
Wiskunde van GIS

29

Wammes voor de constructieve discussie over TEN modelleren, welke de basis voor dit artikel heeft gelegd. Het onderzoek wordt uitgevoerd in het kader van het Bsik RGI (Ruimte voor Geo-Informatie) project '3D topografie' (<http://www.gdmc.nl/3dtopo>).

LITERATUUR

1. Carlson, E. (1987). Three-dimensional conceptual modeling of subsurface structures. In: *Auto-Carto 8*, pp. 336–345.
2. Egenhofer, M. and Andrew, F. (1989). PANDA: An Extensible DBMS Supporting Object-Oriented Software Techniques Database Systems in Office, Engineering, and Science, Zurich, Switzerland, T. Harder (ed.), *Informatik Fachberichte*, Vol. 204, Springer-Verlag, pp. 74–79.
3. Van der Most, A. (2004). An algorithm for overlaying 3D features using a tetrahedral network Master's Thesis TU Delft, 2004, 96 p.
4. Poincaré, H. (1895), Analysis Situs, Journal de l'Ecole Polytechnique ser 2, Vol. 1, pp. 1-123.
5. Shewchuk, J.R. (1997). Delaunay refinement mesh generation, PhD thesis, Carnegie Mellon University.
6. Vosselman, G. (2005). Sensing Geo-information, Inaugural address, ITC Enschede.
7. Zlatanova, S., Rahman, A. A., Shi, W. (2002) Topology for 3D spatial objects, International Symposium and Exhibition on Geoinformation 2002, 22–24 October, Kuala Lumpur, Malaysia, 7 p.



Model 3.